數學傳播　48卷4期, pp. 3-21

有朋自遠方來——專訪
青木一生 (Kazuo Aoki) 教授

策　劃 : 劉太平
訪　問 : 劉太平、尤釋賢
時　間 : 民國 113 年 5 月 20、25 日
地　點 : 中央研究院數學研究所
整　理 : 編輯室

青木一生教授於 1950 年 10 月 28 日出生於京都。他在 1973 年、1975 年及 1979 年分別於京都大學獲得學士, 碩士, 及博士學位。他一直在京都大學擔任教職, 於 2016 年退休, 現爲京都大學名譽教授和國立成功大學名譽講座教授。青木教授是氣體動力學理論的一位領導者。由於他的傑出研究, 以及他將氣體動力學引入數學界所做的努力, 他獲頒 Levi-Civita 獎, 並獲得 Chalmers 理工大學的禧年教授職位。此訪談描述氣體動力學豐富的歷史。對京都學派以及數學研究在物理科學的角色, 有深思及啓發性的論點。

劉太平 (以下簡稱「劉」): 歡迎先生您再次來訪。這些年來, 釋賢和我一直與京都學派關係密切。每當有人從京都來的時候, 我們就會有家人回來的感覺。也許我們可以從您的家庭背景談起?

青木一生 (以下簡稱「青木」): 我在一個普通的家庭長大。我父親那邊的祖父母是教師。我的祖父曾是福井市一所初中的校長。但他在很年輕的時候就離職了, 到大阪開了一家小型軋製 (rolling process) 廠。我的祖母也曾是一名教師, 但只在與我祖父結婚之前短時間任教。他們都畢業於福井師範學校。所以, 相較於其他家庭, 在我的童年時期, 我的家人對教育的興趣稍多一點。其實, 我的伯父 (我父親的兄長) 也自師範學校畢業, 而後成爲了一名教師。有人告訴我, 他在二戰前曾在臺灣高雄的一所女子初中當了幾年老師。戰後他回到日本, 最後成爲福井大學的教授。

劉: 在您祖父的時代, 當老師被認爲是一個非常好的職業。

青木: 是的, 過去老師較受尊敬。

尤釋賢 (以下簡稱「尤」): 青木先生, 我記得那一年非常特別, 因爲學生們佔領了東京大學的塔樓[1]。所以那一年很多學生沒去上東京大學。

青木: 是的, 因爲學生暴力運動, 東京大學取消了入學考試。當時, 國立大學第一類組的入學考試從 3 月 3 日開始, 爲期 3 天。但在 1 月底, 東京大學宣布取消入學考試。

劉: 發生這種情況, 部分原因是東京大學的學生覺得他們對國家有責任, 另一部分原因是它位居大城市?

青木: 佔據東京大學塔樓的學生, 不一定是東京大學的學生。他們認爲這座塔樓是日本帝國主義的遺跡, 是國家權力的象徵。警察和學生之間發生了激烈的打鬥。在京都大學, 同樣到處都是路障。在京都大學籌辦入學考試也很困難。東京大學完全取消了入學考試, 京都大學則以一種非常奇怪的方式繼續進行。直到考試前一天, 京都大學才公佈考試地點, 張貼在校園裡; 我發現我的考試地點在宇治的一所高中。我在高中的運動館參加了入學考試。原本想進入京都大學的學生感到不安, 因爲他們認爲, 許多想去東京大學的優秀學生, 都會參加京都大學的考試。

劉: 所以競爭更激烈。

尤: 那一年, 你和松村 (Matsumura)[2], 還有誰?

青木: 森重文 (Shigefumi Mori)[3] 教授就是其中之一。在動力學理論領域, 森本芳則 (Yoshinori Morimoto)[4] 教授也在其中。

劉: 從京都大學畢業後, 你的職涯步上了一條有趣的道路。

青木: 我覺得這並不有趣。我只是很幸運。我完成博士學位時, 有一個助理研究員 (research associate) 的職缺, 我被錄用了。助理研究員現在被稱爲助理教授, 與臺灣的助理教授相同。

劉: 但這是一個永久的職位。

青木: 是的。從那時起, 我一直在京都大學工作, 直到退休。這有點罕見。我想你還記得航空航

---

[1] 1967年, 東京大學醫學部學生因不滿醫師登記制度取代「研修醫制」, 展開無限期罷課後, 17 名學生因此遭到開除, 衝突一觸即發。到了 1968 年 6 月 15 日, 學生們佔領了東大的權威象徵安田講堂, 在各校分別組織了「全共鬥」(全學共鬥會議), 然後進行統合, 強硬要求和校方「集體談判」。該抗爭遍及全國, 光在東京都內就有 55 所大學遭到封鎖, 即「安田講堂事件」。

[2] 松村昭孝 (Atika Matsumura), 日本數學家, 任教於大阪大學, 研究漸近安定性、時間大域解、黏性衝擊波、半導體方程式、稀薄波、黏性接觸波等。

[3] 森重文 (Shigefumi Mori, 1951∼), 日本數學家, 任教於京都大學, 研究代數幾何方面, 對三維多樣體分類有基礎性貢獻。1990 年獲頒費爾茲獎。專訪 2009 年 12 月刊登於數學傳播第 33 卷第 4 期。

[4] 森本芳則 (Yoshinori Morimoto), 日本數學家, 任教於京都大學, 研究 Boltzmann 方程式、非線性微局部分析、時間大域解等。

太系的舊大樓。它是在 1972 年 4 月我剛開始念大四年時完工的。直到 2013 年我搬到桂校區 (Katsura campus), 我一直待在那裡。你可以數數歷經了多少年。

劉: 41 年。

青木: 是的, 41 年。從某種意義上說, 這是一種極其無聊的生活, 不是嗎? 在退休時會被要求給最後一次演講。在最後一次演講, 我提到我過了 41 年極其無聊的生活, 而這也是我經常出國旅行的原因。這是一個很好的藉口, 不是嗎?

劉: 在你還是學生的時候, 日本的科學已經很先進了。您畢業時, 日本人如何看待西方科學界?

青木: 人們仍然認爲美國和歐洲國家的科學更先進。1973 年, 我在曾根先生 (Sone Sensei)[5]的指導下開始我的碩士學程。他在 1966~1968 年在 Courant 研究所待了兩年, 對那裡仍然記憶猶新, 經常談論他在那裡的經歷以及與他有聯繫的數學家, 諸如 H. Grad[6]、K. O. Friedrichs[7]、J. B. Keller[8]、P. Garabedian[9]。於是我對出國做研究產生了興趣。自從 1978 年我成爲京都大學的助理研究員, 我一直在考慮長期訪問美國或歐洲的某個地方。我一直在找一個造訪的地方。偶然間我在系辦公室看到義大利政府獎學金的招聘公告。我很感興趣, 因爲 Carlo Cercignani[10] 在米蘭。我諮詢了曾根先生, 他鼓勵我申請。幸運的是, 我申請獲准, 因此可以赴米蘭理工大學 (Politecnico di Milano), 跟隨 Cercignani 教授進行爲期兩年的研究工作。實際上, 我第二年獲得了義大利國家研究委員會 (CNR) 的獎學金。

劉: 你拜訪他的時候, Cercignani 已經研究動力學理論一段時間了, 對吧? 你和他合作過嗎?

青木: 是的, 不是很多。但我在那裡時, 我們合寫了一些論文。

劉: 他也去過美國。

青木: 他在麻省理工學院待了一年, 但我想他短暫地訪問了一些不同的地方。

劉: 他的興趣更偏向於分析, 對吧?

青木: 不一定。他同時有物理學和數學學位, 因此對物理學和數學都有廣泛的瞭解。誠然他是一

---

[5]曾根良夫 (Yoshio Sone,1936~), 日本應用數學家, 任教於京都大學航空工程系, 透過運動理論及古典流體力學進行跨學科研究, 對 Boltzmann 程式連續極限理論有頂尖貢獻。專訪 2004 年 6 月刊登於數學傳播第 28 卷第 2 期。

[6]Harold Grad (1923~1986), 美國應用數學家, 以他在等離子體物理學和統計力學方面的工作著稱, 對氣體動力學理論和磁流體動力學做出了重大貢獻。

[7]Kurt Otto Friedrichs (1901~1982), 德裔美國數學家, 致力於偏微分方程的許多方面的研究。他是 Courant 研究所的共同創辦人。

[8]Joseph Bishop Keller (1923~2016), 美國數學家, 建立繞射幾何理論來解決波傳播問題。

[9]Paul Roesel Garabedian (1927~2010), 美國數學家暨數值分析學家, 深具影響力。他在計算流體動力學、等離子體物理學領域做出重大貢獻。

[10]Carlo Cercignani (1939~2010), 義大利數學家, 以他在氣體動力學理論方面的工作著稱, 對 Boltzmann 方程的研究做出重要貢獻, 包括對多原子氣體的 H-定理的證明。

位出色的分析家, 但他也是動力學理論中數值分析和變分技術的先驅。他寫了一些廣義相對論的論文。我由曾根先生和 Cercignani 指導, 但他們完全不同。當然, 我尊敬他們倆。

劉: 關於 Rayleigh 問題, 曾根先生有一篇論文。Cercignani 和他的合作者也有一篇論文。Cercignani 的論文是關於解的構造, 即存在理論。曾根先生研究解的行爲。看到截然不同的心態, 非常有趣。

青木: 是的, 沒錯。Cercignani 年輕時, 從中子輸運理論 (neutron transport theory) 學到初等解法; 它是一種構造線性輸運方程的解析解的技術。而後, 他將這項技術應用於線性化 BGK 模型[11], 並成功地解決了各種問題。其中之一是 Rayleigh 問題。他能夠構建一個解析解。另一方面, 曾根先生對這問題背後的物理有正確的理解, 能使用它來正確無誤地獲得短時間解及長時間解。

劉: 雖然你在工學院, 但你與京都大學及其他地方的很多數學界人物都有聯繫。

青木: 是的。這主要是因爲曾根先生。他與山口 (Yamaguti) 先生[12]有著密切的聯繫。事實上, 山口先生和曾根先生在同一個系。

劉: 在工學院?

青木: 是的, 在航空工程系。它成立於二戰期間。但是, 戰後美國不允許日本做與航空工程相關的研究。因此該系不得不將名稱從「航空工程」更改爲「應用物理學」。當時, 該系提供了一些職位給爲工科學生教授數學的數學家, 山口先生就是其中之一。他從數學系轉到應用物理系擔任教授。該系有流體動力學的藤本武助 (Busuke Fudimoto)[13] 教授、氣體動力學的玉田珖 (Ko Tamada)[14]教授、數學的山口昌哉教授等。大矢勇次郎 (Yujiro Ohya)[15] 教授是該系的另一位數學家; 他當時是一名研究助理。曾根老師告訴我, 當他還是一名碩士生時, 高木貞治 (Teiji Takagi)[16]的《解析概論》一書出版了新版。

劉: 一本有名的教科書。

青木: 是的, 這是一本著名的分析教科書。新版本將 Lebesgue 積分作爲最後一章。這在當時是一個新主題。曾根先生在大學的前兩年就精通了原版, 而後在碩士生一年級時熟讀 Lebesgue

---

[11]BGK 模型是由 Bhatnagar, Gross 和 Krook 做出的 BGK 模型, 假設分子的碰撞會迫使物理空間中的某一點的非平衡分布函數回到 Maxwell 平衡分布函數, 且其發生率正比於分子碰撞頻率。

[12]山口昌哉 (Masaya Yamaguti, 1925∼1998), 日本數學家, 生前任教於京都大學, 對流體力學、非線性偏微分方程有重大貢獻。

[13]藤本武助 (Busuke Fudimoto,1903∼1985), 日本流體動力學家; 京都大學航空工學科創辦人; 京都大學工學研究科院長(1963-1965); 京都工業大學校長(1966-1972)。

[14]玉田珖 (Ko Tamada,1915∼2004), 日本流體動力學家; 1956-1979 年任京都大學航空工程系教授; 因其在跨音速流方面的工作而聞名, 並於 1980 年獲頒日本學士院賞。

[15]大矢勇次郎 (Yujiro Ohya,1936∼2011), 日本數學家, 1970-1998 年任京都大學應用數理系教授, 研究雙曲型偏微分方程式。

[16]高木貞治 (Teiji Takagi, 1874∼1960), 日本數學家, 生前任教於京都大學, 對代數數論做出重大貢獻, 包括高木存在定理, 這是類體論 (class field theory) 的開創性結果。

積分那一章。事實上, 每周他都會以研討會的形式, 向山口先生和大矢勇先生詳細解釋該章的內容。

劉: 曾根先生當時已經深入地進入數學了。

青木: 我漏了提, 曾根先生進大學時, 系的名稱又改回了原來的航空工程系。因此, 他是重生後的航空工程系的第一批學生。完成碩士學程後, 他被聘爲該系的助理研究員。他很快就被升等爲講師, 而後升等爲副教授。之後山口先生和另一位教授在工學院內創辦了一個新系, 就是「應用數學暨物理系」。西田孝明 (Takaaki Nishida)[17]教授和三村昌泰 (Masayasu Mimura)[18] 教授都是該系的學生。在我這一代, 松村昭孝和更年輕的川島秀一 (Shuichi Kawashima)[19]也是同一系的學生。情報學 (informatics) 系甫成立研究所時, 該系從工學院轉到情報學科, 並分爲兩個新系; 迄今這兩個系業已各自發展並更改了組織及名稱。情報學研究科先端數理科學專攻 (Department of Advanced Mathematical Sciences) 傳承自山口先生創辦的系。磯祐介 (Yusuke Iso)[20]教授最近從該系退休, 我的同事田口智淸 (Satoshi Taguchi)[21] 和辻徹郎 (Tetsuro Tsuji)[22] 目前在那裡。你們倆很瞭解這個系, 不是嗎? 幾年前, 您以訪問教授身分, 訪問過那裡幾個月。

劉: 是的, 對我來說, 這是一次非常好的經歷。在慶祝曾根先生 80 歲生日的會議上, 我講了一個他告訴我的故事:『不要買書, 因爲你很快就要把它們送人了』。他將 6 卷 Gelfand-Shilov 的《Generalized Functions》[23]送給了釋賢。我問曾根先生:『你讀過每一卷嗎』? 他說:『不, 我只讀了 6 卷中的 5 卷』。

青木: 曾根先生也讀了那本書的俄文版本, 大概是讀了第一卷和第二卷。我大學四年級時, 必須選擇一個研究小組來完成大學課程。當時玉田教授的小組不受學生歡迎, 因爲那小組中有當時是副教授的曾根先生, 學生們都知道他非常嚴格和嚴厲, 所以沒有學生想去那裡。而包括我在內的兩個學生選擇了那個小組。我被分配到曾根先生那裡。他給了我一個塵埃氣體流動的問題; 更準確地說, 是粒子經過物體的不可壓縮歐拉流。

劉: 你選擇成爲曾根先生的學生, 但每個人都試圖遠離這個太過嚴肅的人。

青木: 我還是一名碩士生時, 開始向曾根先生學氣體動力學理論。我覺得它很有趣, 也很神奇。

---

[17]西田孝明 (Takaaki Nishida), 日本數學家, 任教於京都大學情報學研究科, 研究非線形偏微分方程式、機率論、統計學。

[18]三村昌泰 (Masayasu Mimura, 1941～2021), 日本數學家, 生前任教於廣島大學統合生命科學研究科, 在反應擴散方程、奇性分析、生物化學模型等數學科學領域有廣泛深入地研究。專訪 2005 年 3 月刊登於數學傳播第 29 卷第 1 期。

[19]川島秀一 (Shuichi Kawashima), 日本數學家, 任教於早稻田大學, 研究與氣體、流體和彈性動力學相關的偏微分方程數學分析。

[20]磯祐介 (Yusuke Iso), 日本數學家, 任教於京都大學情報學研究科先端數理科學專攻, 研究微分方程式數值解析、逆問題·非適切問題解析。

[21]田口智淸 (Satoshi Taguchi), 日本數學家, 任教於京都大學情報學研究科先端數理科學專攻, 研究氣體動力學理論。

[22]辻徹郎 (Tetsuro Tsuji), 日本數學家, 任教於京都大學情報學研究科先端數理科學專攻, 研究氣體動力學理論、微流控。

[23]六卷合集《*Generalized Functions*》, 由 I. M. Gel'fand 及其合著者於 1958 年至 1966 年間以俄文出版, 介紹廣義函數及其在分析、偏微分方程、隨機過程和表示論的各種應用。

我知道 Navier-Stokes 方程是複雜的方程。相形之下, Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) 模型顯得非常簡單。儘管如此, 它可以描述各種流動現象。這讓我感到驚訝。雖然我從曾根先生的演講中學到了 Boltzmann 方程, 但當時我並沒有研究 Boltzmann 方程。我開始研究 BGK 模型。曾根先生當時主要使用 BGK 模型進行研究。事實上, BGK 模型是 Boltzmann 方程的良好先驅。它看起來非常簡單。但是流體方程, 例如 Navier-Stokes 方程, 至少形式上可以從中推導出來。這就像魔法一樣。曾根先生推導出 Navier-Stokes 型方程的滑移邊界條件 (slip boundary conditions)。當時, 我不知道是否有可能用 Boltzmann 方程做同樣的事情。但是, 對於曾根先生來說, 這顯然是一樣的。那麼爲什麼曾根先生使用 BGK 模型呢? 在某些時候, 他需要進行數值計算以獲得滑移係數 (slip coefficients)。所以他使用了 BGK 模型。

劉: 出於實用的考量。

青木: 是的。當時, 用數值求解 Boltzmann 方程是絕對不可能的, 但是有可能解 BGK。事實上, 曾根先生設計了一種動差法 (moment method), 以線性化的 BGK 方程爲基礎, 解決 Knudsen 層問題。我參與了他的研究計畫, 所以我從 BGK 模型起步。在博士班期間, 我一直在研究 BGK 模型。

劉: 我聽過某人引用你的話: BGK 捕獲了 Boltzmann 方程的大部分特徵, 95% 或更多。

青木: 我不確定我是不是這麼說的。但至少 BGK 可以再現 Boltzmann 方程所描述的大多數現象。當然, BGK 模型的結果在定量上與 Boltzmann 方程的結果不同; 換句話說, 係數的值通常不同。

劉: 但機制更簡單, 與 Boltzmann 方程相去不遠。

青木: 是的, 確實如此。分子碰撞往往會使氣體平衡, 且大多數現象是由質量、動量和能量的大域守恆以及平衡效應所決定。BGK 方程對大域守恆律有精確地描述並對平衡效應有定性上的正確。因此, 它給出了定性方面正確的結果。1985 年左右, 我們開始使用 BGK 模型進行嚴格的數值計算。大約在那個時候, 一些優秀的研究生, 諸如矢野猛 (Takeru Yano)[24]、大和田拓 (Taku Ohwada)[25]、杉元宏 (Hiroshi Sugimoto)[26], 以及稍晚的高田滋 (Shigeru Takata)[27]來到了曾根先生的小組。他們執行廣泛的數值計算, 效率極高且大有助益。

劉: 這也是因爲電腦越來越好嗎?

[24]矢野猛 (Takeru Yano), 日本流體動力學家, 大阪大學機械工學系教授, 研究氣體動力學、多相流體動力學、分子動力學、氣體運動理論。

[25]大和田拓 (Taku Ohwada), 日本流體動力學家, 京都大學航空航天系教授, 研究數值流體力學、氣體動力學理論。

[26]杉元宏 (Hiroshi Sugimoto), 日本流體動力學家, 京都大學航空航天學科講師, 研究氣體動力學理論。

[27]高田滋 (Shigeru Takata), 日本流體動力學家, 京都大學航空航天系教授, 研究氣體動力學理論、統計物理學。

青木: 是的, 一點都沒錯。直到 1980 年左右, 我們必須使用京都大學數據處理中心的超級電腦進行小規模計算。但其後個人電腦開始盛行, 且性能迅速提高。與此同時, 更昂貴、性能更高的電腦也正盛行; 它們被稱爲工作站 (workstation), 價格是幾百萬日元, 但一般的研究小組都會設法買到它們。在 1980 年代後期, 曾根先生的小組擁有多個工作站和許多個人電腦, 它們日夜運行。我們在個人電腦上進行了初步或小型的計算, 在工作站上進行了中型的計算, 在超級電腦上進行了關鍵的和大規模的計算。1970 年代使用中心的電腦時, 我不得不使用穿孔卡。但在 1980 年代後期, 我們可以更便利地使用超級電腦, 因爲個人電腦也用作它的遠端終端裝置。我認爲我們在很好的時機開始做數值計算。我們使用 BGK 模型進行了許多精確的計算, 而後大和開始以數值方式準確分析線性化的 Boltzmann 方程; 他直接用有限差分方法求解線性化的 Boltzmann 方程, 在這之前未曾有人認真嘗試這麼做。大和及高田成功地解決了一些基本問題, 例如兩個平板之間的流動、熱蠕變和通過球體的流動。我認爲這是曾根先生研究群非常重要的貢獻: 非常準確地求解線性化的 Boltzmann 方程。

劉: 這已成爲一項開創性的成就, 並確立了基準。

青木: 是的, 還有一些人使用我們的結果作爲基準。一段時間後, 我們也開始使用 DSMC[28]方法, 當作 Boltzmann 方程的數值分析工具。它是 Graem A. Bird[29] 於 1963 年提出的一種粒子及隨機方法, 由 Bird 教授等多人開發。該方法很容易執行, 且無需瞭解 Boltzmann 方程。因此, 它變得非常盛行, 尤其是在研究高速非平衡氣流的工程師之間風行。如您所知, 以足夠高的精度對非線性 Boltzmann 方程進行數值求解非常困難。1990 年左右, 曾根先生研究群的大和田拓, 試圖用有限差分法求解非線性 Boltzmann 方程, 獲得一維衝擊結構問題的精確數值解。這是一項重要的工作。但是這種方法僅限於一維空間的問題, 要擴展到多維問題非常困難。相形之下, 用 DSMC 方法處理多維的問題並不困難; 與有限差分方法相比, 這是一個強大的優勢。但是, 在當時, 我們認爲至少對一維問題而言, 有限差分方法比 DSMC 方法更準確。令人失望的是, 這不是真的。一段時間後, 我們將大和的方法, 應用於二元氣體混合物的兩個板之間的傳熱問題, 並藉由 DSMC 方法解決同樣的問題。我們預計 DSMC 計算會爲巨觀物理量 (例如溫度分佈) 給出合理的結果, 但預期它無法正確描述速度分佈。但我們錯了。結果 DSMC 能夠準確描述速度分佈函數的急劇變化。這真是令人驚訝。當然, DSMC 也有其自身的缺點; 該方法很難描述解的時間演變, 也很難避免經常隱藏微妙現象的統計雜訊。

劉: 大和後來轉而從事流體等工作。我問他:『你怎麼比較你現在和以前做的事?』他說,『我現

[28]即 direct simulation-Monte Carlo method, 是一種模擬氣體流動的方法, 廣泛應用於空氣動力學及航空航天研究。

[29]Graem A. Bird (1930~2018), 澳洲航空工程師, 任教於雪梨大學。他研究分子氣體動力學, 從而發展出 DMSC 方法, 與 NASA 密切合作。

在做的事情要容易得多』。計算 Boltzmann 方程非常困難。他需要休息一下, 放鬆一下。

青木: 也許吧, 這是真的。當時, 曾根先生開始以互補的方式將理論和數值分析相結合, 這種方法被後代研究小組所採用。理論分析以分析或明確的形式給出結果, 這是一個很大的優勢。但是, 它通常只能對數值較小或較大的參數執行。另一方面, 數值分析可以應用於更廣泛的參數, 儘管得到的結果只是數字, 而不是公式。因此, 它們是互補的, 而且都很重要。還應該強調的是, 透過數值分析, 你可以看到物理現象發生了什麼, 從而產生物理上的感覺。這爲理論分析提供了很好的洞察力。

劉: 數學家通常認爲曾根先生的書[30]很難讀。事實上, Reinhard Illner[31]寫了一篇評論, 說這本書非常密集, 並不容易。這並不是說這本書寫得不好。這本書實際上寫得很好, 英文也很好。也許問題在於數學家有不同的出發點。我們從方程起步, 接著進行分析, 而不是從引導出方程的物理場景開始。你的陳述讓我想起了這一點。書中與物理學相關的部分主要是英文句子, 而不是方程式。

青木: 是的。對數學家來說, 這是最困難的一點。

劉: 數學家會說, 告訴我你指的是哪個方程式、哪一項。

尤: 是的, 每個關於物理現象的英文句子, 我們需要將它辨識爲一個方程。

劉: 今年一月, 我們和 Mario Pulvirenti[32]一起在蘇黎世。在那裡, 他提到了曾根先生的書。關於具非單調勢能 (如 Lennard-Jones 勢能) 的 Boltzmann 碰撞積分, 他曾想知道一些資訊; 他在曾根先生的書中他找到了它們。他說:『一切都寫在曾根先生的書中, 但數學家們不知道。很遺憾。』我問問題時, 曾根先生總是很有耐心; 他可以重複好幾次回答, 直到我明白爲止。順帶一提, Mario 說他真的很喜歡你的演講及對話; 你直接而清晰地表達事情。就像我們許多人一樣, 他很欣賞你用數學術語清楚地解釋物理事物。對數學界來說, 這是非常好的。

青木: 謝謝你的好話。對我來說, 有時數學結果不是很清楚。例如, 許多數學家對衰減率感興趣, 例如『時間加 1』,『冪減去 3』, 或類似的東西。這個衰減率是用數學證明的, 所以它是絕對正確的。但是, 它是在時間趨於無窮大時被證明的。那麼這個無窮大有多大呢? 如果這個無窮大是 10 到 20 秒, 那麼你永遠不會把這個衰減率當作一個真實的現象來觀察。

劉: 對, 不會在你的有生之年如此。

---

[30] *Kinetic Theory and Fluid Dynamic*, 1st ed., 2002, Birkhäuser; Reprint, 2012, Birkhäuser. *Molecular Gas Dynamics Theory: Theory, Techniques, and Applications*, 2006, Birkhäuser.

[31] Reinhard Illner, 加拿大數學家, 任教於維多利亞大學, 研究動力學理論、動力學模型、非穩定統計力學。

[32] Mario Pulvirenti (1946∼), 義大利數學家, 羅馬第一大學數學物理名譽教授。他在統計力學、古典及量子動力學理論、流體動力學、相互作用粒子系統領域貢獻卓著。

青木: 不, 不會在你的有生之年如此。但是, 如果是 100 或 1000 秒, 那麼您可以觀察衰減率。我總是對此感到好奇, 有時很想進行數值分析來見證數學證明的衰減率。

劉: 一個例子是關於具擴散反射邊界的自由分子流的計算。你對球體、圓柱體進行了精確計算。現在數學家可以證明它對任何形狀都成立。但是, 係數取決於幾何形狀。而我們不理解這一點。

青木: 是的, 這是 Mario、Carlo Marchioro[33]、Guido Cavallaro[34]和 Silvia Caprino[35] 的一篇論文促發的。該論文是關於與自由分子氣體中的移動圓盤相關的衰變速率。Mario 在會議上發表關於它的演講時, 用數學證明了衰減率, 而我對數值上觀察此衰減率產生了興趣。事實上, 我們進行了數值分析並觀察了衰減率。一般的想法是數值模擬對實際應用很有用。但我認爲它對基礎及數學問題也很有用。見證數學證明的真相很高興; 另一方面, 數值模擬可以提出數學該去證明的基本問題。

尤: 您與法國人互動, 也與義大利人互動, 還與我們互動。你是否看到這些數學家之間的不同?

青木: 是的, 但很難說有什麼不同, 因爲我只與各個國家的少數數學家合作過。此外, 由於我不是數學家, 我無法清楚地理解它們在數學上的差異。我只能做以下評論。一些應用數學家更感興趣的, 是在物理中出現的方程式的應用, 或針對這些方程式開發數學技術, 但對物理背景或對物理的影響不太感興趣。其他數學家對解決物理相關問題更感興趣, 並希望看到解的物理結構。我很自然地與後一類數學家合作過, 因此不同國家的差異並不大。但是, 如果我必須說的話, 法國數學家確實掌握了各種技術, 並正確地應用了它們。但是, 你們倆首先解決目標問題, 然後開發解決問題所需的技術。我錯了嗎?

劉: 也許吧。當然, 俄羅斯人在動力學理論方面也做了很好的工作。而且你很適合來做評論, 因爲你與他們有些聯繫。

青木: 我認識的俄羅斯數學家很少。

劉: 是的, 像 Kogan[36]這樣的人?

青木: 是的, 他是一名空氣動力學家, 但他非常瞭解數學。Mikhail Kogan 在 1991 年拜訪了我們。我們邀請他參加我們籌辦的一個會議, 會議結束後他在京都大學住了一個星期。Kogan 教授是一位傑出的物理學家, 具有紮實的數學背景。他的優勢是他有非常好的物理直覺。

劉: 如果實際的分析違背了他們的直覺? 它可能會發生的。

---

[33]Carlo Marchioro, 義大利數學家, 任教羅馬第一大學, 研究渦流、統計物理學、非線性系統、統計力學、動力系統、流體力學。

[34]Guido Cavallaro, 義大利數學家, 任教羅馬第一大學, 研究古典及統計力學、運動理論、流體動力學、相互作用的粒子系統。

[35]Silvia Caprino, 義大利數學家, 任教羅馬第二大學, 研究運動理論、偏微分方程。

[36]Mikhail Naumovich Kogan (1925~2011), 俄羅斯數學物理學家, 任職於俄國科學院計算中心, 以其在稀薄氣體動力學方面的工作而聞名。他對高空氣流、高超音速的研究, 以及非平衡流中 Boltzmann 方程式求解方法的發展, 做出了重大貢獻。

青木: 我覺得他很難接受。也許你知道, 對於具有任意形狀和溫度分佈的靜止體周圍的自由分子氣體, 曾根先生構建了精確而明確的解。邊界條件是 Maxwell 條件, 即擴散反射和鏡面反射的線性組合, 而邊界條件中的調節係數取決於邊界上的位置。這是一個非常一般的情況。

劉: 是的, 這個解法很神奇, 很簡潔。

青木: 但是, Kogan 教授一開始並不相信。他在 1965 年用俄文寫了一本《 Rarefied Gas Dynamics》的書, 在 1969 年被翻譯成英文。Cercignani 的第一本書也在 1969 年出版; 我是碩士生時, 這兩本書是動力學理論的標準教科書。Kogan 花了不少篇幅來介紹自由分子流, 並且非常了解這個主題。儘管如此, 曾根的解決方案對他來說是違反直覺的。Maxwell 條件包括擴散反射。因此, 如果要追溯分子軌跡並觸及邊界, 需要確定入射分子的軌跡, 以便繼續追溯。然而, 擴散反射需要來自各個方向的入射分子; 因此, 除了鏡面反射的情況外, 不可能追溯分子軌跡。我猜想你和釋賢就是出於這個原因使用了機率方法。然而, 令人驚訝的是, 曾根的解的構建, 只需藉由追溯鏡面反射分子的軌跡並遵循處方。這是一個巨大的驚喜。由於這與 Kogan 的直覺相去甚遠, 曾根先生花了幾天時間才說服他。最後, 他明白了, 非常喜歡它。

劉: 你很擅長培養學生。你有好幾位我認識的非常好的學生。

青木: 不多, 因爲我一直在工程學系, 因此沒有多少學生繼續攻讀博士學位。大多數學生, 即使是非常優秀的學生, 在獲得碩士學位後也會離開。

劉: 他們去工業界。

青木: 是的, 一般來說, 在碩士課程結束後, 他們可以在工業界找到好工作。因此我沒有很多博士生。我以前的博士生中目前有 4 人在京都大學工作。

劉: 山口先生是另一位了不起的人物。他對很多事情都感興趣。

青木: 山口先生的小組在和歌山縣白濱市有個暑期學校; 山口先生曾經邀請曾根先生到那裡講授一門課程。我想那是 1978 年。曾根先生沒有接受邀請, 而是派我代替他授課。大約在那個時候, 曾根先生與大西義元 (Yoshimoto Onishi)[37] 合寫了一篇關於蒸發及冷凝的漸近理論的論文。他要求我, 或者更準確地說, 他命令我在暑期學校討論這篇論文, 我照做了。在那個場合, 我第一次親自見到了山口先生。我還遇到了三村先生、俣野博 (Matano)[38] 先生及其他一些人。我有機會與山口先生聊天。他問我:「你認識鵜飼 (Ukai)[39] 兄嗎?」 那時我只知道

---

[37] 大西義元 (Yoshimoto Onishi ,1944～2008), 日本流體動力學家, 1988～2008 年任鳥取大學教授, 研究氣體動力學理論、懸浮液。

[38] 俣野博 (Hiroshi Matano, 1952～), 日本數學家, 明治大學先端數理科學所特任教授, 研究非線形解析、非線形偏微分方程式。

[39] 鵜飼正二 (Seiji Ukai, 1939～2012), 日本數學家, 任教於東京工業大學, 研究 Boltzmann 方程、流體方程、漸近理論。他對非線性邊界層的理解以及 Boltzmann 方程式大域解的存在性做出重大貢獻。

他的名字。他繼續說道:『他現在因爲在 Boltzmann 方程方面的工作而舉世聞名。每個人都提到他』。山口先生還說:『幾年前, 玉田教授告訴我,「你們數學家應該研究 Boltzmann 方程。這是一個重要的方程式, 你可以做出很多貢獻」。他說得對, 這是真的。

劉: 是的, 像鵜飼這樣的人更有趣, 實際上他接受了培養工程師的教育, 然後決定做分析。

青木: 是的。他們受的教育要他們朝著某個方向前進, 但隨後他們發現另一個方向比那個方向更有趣。

劉: 是的, 他們完全喜歡那種新的宗教。

青木: 是的, 新的宗教。這是真的。

劉: 說到宗教, 我讀了一本書, 實際上是一本日本書, 是關於深奧佛教的藝術。在日本, Kūkai 尤爲重要。

尤: 空海。

劉: 對。密教在西藏也很盛行。我讀到的那本書中, 有個有趣的陳述: 密教應該是神秘的; 因此不應該對普通人有吸引力。但是, 它有一套特定的儀式, 非常明確, 你可以掌握它。所以這個教派實際上最受歡迎。是的, 因爲佛教的其他教派要求你思考, 而不是遵循儀式。我們都同意, 思考是困難的。遵循儀式要容易一些。我有時覺得, 如果你深入分析, 就會發現某些儀式: Sobolev 不等式、柯西-施瓦茨不等式、部分積分等。它有點像一個宗派。但是, 如果你需要思索物理、方程及解是如何相關的, 這是思考。而思考是困難的。

青木: 或許大多數數學家在這種情況下都感到不安。他們想要有一個非常堅實的基礎, 他們想要站在非常穩固的地面上。而後, 在這個地面上, 他們可以做很多事情, 做任何他們想做的事。但是有些地方你不能站, 比如泥濘的沼澤, 這會讓你感到不安。

劉: 不安, 是的。我認識一些人, 他們被工程數學吸引, 通常也被某種意義下的純數學吸引。他們很擅長數學, 做了很好的工作, 感覺很自在, 再也回不去了。京都大學有一位偉大的物理學家, 曾根先生認識他。有一次他們一起坐在一起聽課, 這位物理學家對曾根先生說:『這是數學, 不是物理學』。他提到了一些對話。對於局外人來說, 也許差異是微妙的。但對於這位物理學家來說, 差異明顯存在。普通人的職業生涯跨越幾十年。在這幾十年裡, 我們將嘗試一點一滴地看看其他人在做什麼。但現代學術界承受著如此大的壓力, 你不能這樣做。我認爲這是一個相當新的現象。學術界的非正式的對話還不夠多。人們用他們特定的語言說話。在某種程度上, 這就像一套不同的宗教。

青木: 是的, 從這個意義上說, 溝通非常困難。對我們來說, 數學非常特別。我對分析知之甚少, 對數學的其他領域一無所知。但是, 我仍然認爲數學是一門非常特殊的學科。如今, 應用數

學家正在研究不同的學科, 諸如生物學、量子力學、廣義相對論、人工智慧等等。但是, 坦白地說, 我不知道他們的結果對原初領域是否真的有用。有時, 他們只是從不同的世界裡獲悉方程式, 並試圖證明一些東西。然而, 在這個階段, 他們的研究可能會與最初的問題或興趣脫鉤。我確信他們中的一些人對原初領域做出了重要貢獻。然而, 一些數學家從原初領域中相當簡單的模型起步, 並且詳細研究了數學性質。但通常, 他們會對這種簡單的模型有所不滿, 並出於數學興趣或圖方便, 對模型或方程添加額外的效能。在這個階段, 他們的一些方向走偏了, 與原初領域所需的方向大相徑庭。也許我批評數學家太多了$\cdots\cdots$

劉: 變得像純數學, 會自生出自己的方向。

青木: 但對於許多數學家來說, 遵循這些途徑可能更愜意。

劉: 是的, 我認爲這是全球化、互聯網等等的一部分, 它們太快了。我認爲這是這情況的結果。如今, 一個人很難有自己的幾個月時間思考一些事情, 總是將自己嵌入到某個社群中。好, 讓我們回到前面的問題。您之前也去過俄羅斯, 遇到一些人。

青木: Alexander Bobylev[40] 幾乎是我唯一認識的俄羅斯數學家。他有點特別, 對吧? 他與曾根先生不同, 但也非常出色, 是一位非常精熟的分析學者。

劉: 是的。某種程度上, 他或多或少浸潤在 19 世紀的古典分析, 運作這些特殊函數和顯式表達式。它有它的生命力。在工程社群中, 您比大多數工程師更擅長數學。工程師認爲你是一名數學家, 因爲你總是用數學術語來表達你的東西, 對吧?

青木: 是的, 大概吧。首先, 應清楚地說明所考慮的問題和假設。然後, 在所述假設下, 應明確陳列基本方程、邊界條件等。之後的過程只是數學或數值分析。我總是盡量不混淆這些步驟。回到曾根先生, 我必須說: 正如我們提到的, 他有非常紮實的數學基礎。他很了不起, 但沒有明顯展示他的能力。

劉: 他只在絕對必要的時候才用它。

青木: 是的。他經常對我和其他人說,『我不使用高等數學, 比如泛函分析, 而只使用微積分。但是, 我以我想要的方式正確、完美地使用微積分』。

劉: 在歐洲, 你對瑞典人也有一些印象。他們其實起步很早, 對吧? 例如, Carleman[41]。

青木: 是的, Carleman。還有 Leif Arkeryd[42], Boltzmann 方程數學的先驅之一。他在 1970

---

[40] Alexander Bobylev (1847～), 俄羅斯數學家, 目前任職 Keldysh Institute of Applied Mathematics (KIAM)。他在空氣動力學等數學物理領域有獨特見解及卓越貢獻。專訪 2019 年 12 月刊登於數學傳播第 43 卷第 4 期。

[41] Torsten Carleman (1892～1949), 瑞典數學家, 致力於經典分析及其應用。他率先證明了 Boltzmann 方程式解的存在性。

[42] Leif Arkeryd (1940～) 瑞典數學家、Chalmers 理工大學榮譽教授, 以他在 Boltzmann 方程方面的研究而著稱。他在 1972 年發表的論文, 是動力學理論領域的重要里程碑。他的研究重點是 Boltzmann 方程式解的存在性和行爲, 及其在各種物理系統中的應用。

年代初期就發表了一些重要的論文。我在米蘭待了兩年, 有幾個短期訪客, Leif Arkeryd 就是其中之一。當時, (米蘭理工大學數學系) 的所有人都回家吃午飯。這是義大利的一個傳統。該系在上午 12 點到下午 3 點之間幾乎空無一人。所以我經常和 Arkeryd 一起去大學餐廳 (義大利的 “mensa”)。我們有很多時間談論各種事情, 並成為了好朋友。

劉: 他有點不同。他是個嚴肅的人。

青木: 是的, 非常嚴肅, 也是個非常好的人。當他考慮數學中的某個東西時, 思考很深刻, 不受周圍環境的影響。

劉: 是的, 我們談論的是他使用非標準分析的工作。以色列數學家 Kaniel[43]曾經告訴我, 當 Robinson[44]提出非標準分析時, 他腦子想的是 Boltzmann 方程。

青木: 我第一次在米蘭見到 Arkeryd 時, 大概是在 1982 年, 他正在使用非標準分析研究 Boltzmann 方程。我記得, 他說 Boltzmann 方程在非標準分析的語言中變得更簡單了, 儘管我對此一無所知。但是, 幾年後, 他又回到了標準分析; 我不知道原因。1990 年代後期, 曾根先生開始在哥德堡拜訪他。他夏天喜歡在那裡, 因為京都的夏天太熱了, 令人不快。經過與曾根先生的討論, Arkeryd 對一些物理問題產生了興趣, 並開始與 Anne Nouri[45] (後來與 Raffaele Esposito[46] 和 Rossana Marra[47]) 一起研究與 ghost effect 相關的邊界問題。

劉: 曾根先生提出這個問題後, 他們研究了一段時間。

青木: 在米蘭的兩年裡, 我還認識了幾位義大利數學家。但是, 那時我不認識 Mario Pulvirenti。我第一次見到他是在 1985 年在巴黎南部奧賽的一次會議上。事實上, Arkeryd 把我介紹給了 Pulvirenti 和 Reinhard Illner, 我們在一個晚上一起在巴黎吃了晚飯。Illner 是當時動力學理論界的一顆明星, 因為他的論文論述了 Boltzmann 方程在初始值較小時的柯西問題的大域解存在性。這是我第一次關於數學動力學理論的會議, 對我來說非常有趣。借此機會, 我還第一次見到了 Claude Bardos[48] 及 Giuseppe Toscani[49], 日本的淺野潔 (Kiyoshi Asano)[50]教授和川島秀一教授也參加了這次會議。

---

[43]Shmuel Kaniel (1934～2017), 以色列數學家, 以他在數值分析及線性代數方面的工作著稱。他對計算技術做出了重大貢獻, 包括開發共軛梯度及廣義梯度方法等估計方法。他的研究在數值線性代數領域深具影響力, 並在各個科學和工程學科中都有實際應用。

[44]Abraham Robinson(1918～1974), 出生於波蘭的數學家。他率先將數理邏輯, 特別是模型理論的方法及結果應用於數學, 進而研發了非標準分析。

[45]Anne Nouri, 法國數學家, 任教於 Aix-Marseille 大學, 研究動力學理論和相關模型, 對 Boltzmann 方程式、玻色-愛因斯坦凝聚態、聚集擴散方程式的研究做出了重大貢獻。

[46]Raffaele Esposito, 義大利數學家, 任教於義大利 L'Aquila 大學, 研究流體力學、Boltzmann 方程。

[47]Rossana Marra 義大利數學家, 任教於羅馬第二大學, 研究流體力學、Boltzmann 方程。

[48]Claude Bardos(1940～), 法國數學家, 目前任職於 Laboratoire J.-L. Lions, 對偏微分方程、動力學方程及流體力學有重大貢獻。專訪 2004 年 9 月刊登於數學傳播第 28 卷第 3 期。

[49]Giuseppe Toscani, 義大利數學家、Pavia 大學榮譽教授。他在數學物理學方面的工作在運動理論及其在複雜系統有重要應用領域。

[50]淺野潔 (Kiyoshi Asano), 日本數學家, 任教於京都大學, 研究 Boltzmann 方程、流體力學。

劉: 你提到了 Cabannes[51], 他似乎在連結京都及法國學派方面起了重要作用。

青木: 是的。曾根先生與 Henri Cabannes 教授有些聯繫。他曾是皮埃爾暨瑪麗居禮大學 (巴黎第 6 大學) "Moselisation en Mecanique" 實驗室的教授。他到日本拜訪玉田珖教授; 當時曾根先生還是一名碩士生。曾根先生自此結識了 Cabannes。1980 年, Cabannes 爲曾根先生提供了一個爲期六個月的客座教授 (invited professor) 職位。從那時起, 曾根先生多次受邀訪問 Cabannes 的實驗室, 每次一兩個月。在此期間, 他與一些從事動力學理論 (離散速度模型) 及兩相流 (two phase flow) 的科學家取得聯繫, 諸如 Cabannes 本人、Renée Gatignol[52]及 Daniel Lhuillier[53]。Cabannes 還將 Claude Bardos 介紹給曾根先生。這開啟我們與法國數學家的接觸。1980 年代, 歐洲航太局啟動了 Hermes 太空飛機 (spaceplane) 專案, 氣體動力學理論在太空飛行中的重要性獲得認可, 特別是對高速稀薄氣流的模擬。這個模擬專案有一些來自不同國家的統籌者: 來自法國的 Claude Bardos、來自義大利的 Carlo Cercignani、來自德國的 Hermut Neunzert[54]等等。在這方面, Bardos 小組中的數學家, 如 François Golse[55] 和 François Coron[56], 對數學以及植基於動力學理論的模擬都感興趣。這種情況促成了他們與曾根先生及他的小組成員 (包括我自己) 的積極接觸。特別是, 大約在那個時候, 對與高速蒸發/冷凝問題相關的, 在半空間的模型 Boltzmann 方程的解, 曾根先生進行了數值分類。它激發了非線性半空間問題的數學研究, 法國數學家開始研究這些問題。這是我們與法國數學家合作的開始。順便說一句, 你們倆後來也研究了這個問題, 並取得了重要的成果。1991 年, Cabannes 教授還邀請我訪問了兩個月, 之後我多次訪問了他的實驗室。

劉: 1966-68 年期間, 曾根先生拜訪了 Courant 學院的 Harold Grad。在此之前, 他已經開始著手於邊界展開式。曾根先生非常敬重 Grad, 將一些展開式稱爲 Grad-Hilbert 展開式。但實際上, 曾根先生獨立做出了自己的展開式, 且研究已十分深入。法國人直到 1980 年代中期才進行數學分析。當京都和法國團體之間的交流開始時, 京都學派似乎具有優勢。您們對這些現象有更深入地瞭解。這一優勢遲遲沒有得到認可。

青木: 是的, 確實如此。在去 Courant 研究所之前, 曾根先生已經對 Boltzmann 方程和流體方程之間的關係有了清晰的認識, 更具體來說, 涵蓋了流體方程的類型、Knudsen 層及滑

---

[51] Henri Cabannes (1923～2016), 法國數學家, 任教皮埃爾暨瑪麗居禮大學, 研究流體力學、有障礙物的振動, 對跨音速流、衝擊波和磁流體動力學的研究做出了重大貢獻。

[52] Renée Gatignol, 法國數學家, 皮埃爾暨瑪麗居禮大學的名譽教授。她對流體力學做出了重大貢獻, 特別是在漸近方法及其在複雜流體動力學問題中的應用。

[53] Daniel Lhuillier, 法國數學家, 任教皮埃爾暨瑪麗居禮大學, 研究流體力學。

[54] Hermut Neunzert (1936～), 德國數學家, 以他在應用數學 (特別是工業數學) 領域的工作而聞名。他對 Fraunhofer 工業數學研究所 (ITWM) 的發展起了重要作用, 並在數值方法、等離子體物理和統計力學等多個領域做出貢獻。

[55] François Golse (1962～), 法國數學家, 任教巴黎綜合理工學院, 對偏微分方程和動力學理論的研究有傑出貢獻。專訪 2009 年 6 月刊登於數學傳播第 33 卷第 2 期。

[56] François Coron, 法國數學家, 任教皮埃爾暨瑪麗居禮大學, 研究運動理論及其在空氣動力學中的應用。

移/跳躍邊界條件等。我認爲他在訪問 Courant 研究所時, 詳細闡述了他對小 Knudsen 數 (或小平均自由徑 (mean free path)) 的漸近理論。他在兩次稀薄氣體動力學國際研討會 (International Symposia on Rarefied Gas Dynamics) 上發表了這些結果: 一次於 1968 年在波士頓, 另一次於 1970 年在義大利比薩。對線性和弱非線性情況下的小平均自由徑, 他從 Boltzmann 方程 (更準確地說是 BGK 模型) 中建立了流體方程和滑移/跳躍邊界條件。弱非線性情況涵蓋了所謂的不可壓縮 Navier-Stokes 極限。在 1960 年代後期, 他已經知道: 要從 Boltzmann 方程推導不可壓縮的 Navier-Stokes 方程, 該用的正確縮放 (scaling) 比例; 他在比薩發表的論文包含了該結果。我想他沒有參加, 但其他人報告了那篇論文。遺憾的是, 這篇論文發表在研討會的論文集中, 而論文集很晚才由當地出版商出版 (我推測是 1974 年)。因此, 很遺憾地, 這篇重要的論文不爲其他人所知, 尤其是數學家。值得一提的是, 這篇論文還包含高階流體方程的推導, 及其正確的邊界條件。在 1990 年代, 一些法國和義大利數學家, 在對曾根先生的工作一無所悉的情況下, 獨立地獲知正確的縮放, 並開始研究全空間上不可壓縮的 Navier-Stokes 極限。我感到遺憾的是, 數學家們沒有意識到或低估了曾根先生的成就。他們認爲他只做了形式上的分析或展開式, 沒有嚴格的證明。

劉: 說到嚴謹還是形式, 京都學派的教育給我的印象如下。什麼是形式的, 什麼是嚴格的? 如果從科學的角度出發, 那麼只有在考慮物理現象的情況下, 進行漸近展開, 它才是嚴格的。從這個意義上說, 京都漸近展開是嚴格的。數學家會說, 我有 epsilon 平方, epsilon 等於 alpha 的平方根, 等等, 然後進行系統性展開。但從物理的角度來看, 這是形式的。它是形式的, 因爲它不是出於物理考慮, 因此缺乏物理意義。相較於純粹分析意義上的嚴謹性, 物理意義上的嚴謹性要難得多。要去思考馬赫數、Reynold 數、平均自由徑等與實際物理相關的事件。我更喜歡物理意義上的嚴謹。我說這些是爲了與你核實。

青木: 那很好。從這個意義上說, 嚴謹和形式這兩個詞並不含糊。我提到了曾根先生對不可壓縮 Navier-Stokes 極限的縮放, 這只是一個例子。與物理現象相關的問題的數學公式以及適當假設, 通常由物理學家或工程師做出, 之後數學家一般來說負責分析。我知道分析部分很困難, 需要付出巨大的努力來證明一些東西。然而, 數學家往往不理解和欣賞公式和假設的重要性。在我看來, 這很不幸。我認識動力學理論領域的一些數學家, 實際上他們是我的好朋友。但是, 我必須說他們中的一些人有這種傾向。當然, 也有一些例外, 比如你倆和 François Golse。如您所知, Golse 是一位偉大的數學家, 但他對數學問題的物理相關性總是仔細認真。

劉: 新一代做計算的人開始大量引用曾根先生的書。是年輕一代在引用京都文獻。從某種意義上說, 這是分析的一個缺點。分析的嚴謹性使它非常困難。隨著計算機的巨大發展, 計算變得

相對容易。他們能理解源自京都的核心貢獻。

青木: 確實, 一些做數值計算的人更關注曾根先生的書, 尤其是 2007 年出版的第二本書。遺憾的是, 不太有數學家閱讀及理解這本書, 主要是因爲它不包含定理和證明。Mario Pulvirenti 還告訴我,『這本書包含了很多重要資訊, 但數學家們不知道。真可惜』。他是少數幾個認識到這本書的重要性的數學家。在這方面, 我必須說以下幾點。對數學家來說,「嚴謹」的論文是指包含定理和證明的論文。因此, 所有數值計算的論文都不是嚴格的, 屬於同一類別。然而, 在現實中, 數值分析的成就等級因論文而異。如果您進行一些數值模擬, 可以獲得一些結果。但結果是否準確是另一回事。在一些論文中, 僅僅因爲結果看起來合理, 就給出了結果, 而不檢查準確性。在其他論文中, 透過改變網格的大小、計算域的大小、反覆運算中的收斂程度等, 從各個角度非常仔細地檢查準確性。這兩個類別的品質差異很大。不幸的是, 數學家往往不區分差異, 把它們放在同一類, 即「非嚴謹」的論文。對於包含「形式」分析的論文也是如此。如果這一點能得到更多的認可, 那就太好了。

劉: 對。對於那些對現象感興趣的人來說, 嚴格和非嚴格之間有明確的區別。這無疑要就數學來看, 毫無妥協。我來講一個故事。我告訴曾根先生: 人們說釋賢和我在不變流形上做的是局部理論。曾根先生驚呆了。他說: 但你的是局部-大域的, 而其他人的則是局部-局部的。分析是對局部情況做的, 這不可免的; 但是這個局部理論是否包括關鍵要素, 從而允許分岔、強非線性效應的研究? 如果不包括, 那麼這就是局部-局部理論。我們所做的是局部-大域的。

青木: 是的, 他明白數學的要義。關鍵是: 局部分析只解決局部問題, 還是提供一些大域性的洞察力和理解? 這有很大的不同。釋賢寫了一篇論文, 是關於兩個不同溫度的板之間有碰撞或無碰撞的稀薄氣體。他使用機率方法來處理邊界條件。一開始我並沒有了解這項工作的重要性。但曾根先生立即了解到, 釋賢用一個全新的想法解決了一個非常困難的問題。事實上, 在無碰撞的情況下, 如果邊界條件是鏡面反射, 你可以將粒子路徑追溯到初始條件。但是, 對於擴散反射, 一旦在回溯時到達邊界, 就需要來自各個方向的入射分子的資訊。因此, 不可能以確定性的方式描述解。釋賢巧妙地迴避了這個困難。

劉: 我想問你一個具體的問題: 你在京都的小組, 是什麼時候開始研究蒸發-凝結現象的分枝圖 (bifurcation diagram)?

青木: 84 年代左右。東京大學的小口伯郎 (Hakuro Oguchi)[57] 教授用動差法研究強凝結。在動差法, 您假設解是一種組合形式, 由分子速度的已知函數, 以及空間時間變數的未知函數組合而成。而後將其放入 Boltzmann 方程, 並取 Boltzmann 方程的必要動差, 來獲得空間時間變數的未知函數的偏微分方程。之後以數值方式求 PDE 的解。因此這些方法是完全任

[57]小口伯郎 (Hakuro Oguchi, 1924∼2005), 日本流體動力學家, 1962∼1981 年任東京大學教授, 1981∼1988 年任日本宇宙航空研究開發機構 (JAXA) 宇宙航空科學研究所 (ISAS) 教授, 研究氣體動力學、氣體動力學理論。

意的, 通常不能保證解的準確性。小口教授和他的同事, 用動差法研究了亞音速 (subsonic) 和超音速 (supersonic) 凝聚。與此同時, 曾根先生發現有限差分方法適用於 BGK 模型。BGK 模型比動差法可靠得多; 強凝結問題是一維的問題, 是一個很好的測試用例。於是在三維參數空間, 即壓力比、溫度比和馬赫數, 我們用數值來構建圖, 標示解的存在範圍。如您所知, 如果溫度比是固定的, 則您有一個馬赫數和壓力比的平面。在亞音速情況下, 解存在於平面的曲線上; 但在超音速情況下, 它存在於區塊中。相較之下, 根據小口教授之前的結果, 在亞音速和超音速情況下, 解都存在於曲線上。因此, 我們的結論是他們的結果是錯誤的。

劉: 他們似乎找到了釋賢和我所稱的分岔流形上的解。

青木: 我不確定。當時, 我們進行了密集的數值計算, 在超音速情況下, 我們在定義域中找到了許多穩定的解。1986 年, 在距離 Trieste 不遠的 Grado 舉行的稀薄氣體動力學研討會上, 曾根先生發表了這一結果。之後, 我們花了一些時間進行更全面的計算, 並以數值方式構建出穩態解在三維參數空間的存在範圍。我們在 1990 年和 1991 年發表了我們的數值結果。而後曾根先生以分析方式研究了曾根流形分岔 (Sone manifold bifurcation)。我想說, 這是一種由數值計算輔助及支援的分析。這在當時是一種新方法。我認爲這篇論文是由曾根先生、大和、土井俊行 (Toshiyuki Doi)[58]和 Golse 撰寫的。我記不淸它是什麼時候發表的。你可以用曾根先生的書來核實。

劉: 好的, 是 1998 年。

尤: 哦, 98 年。實際上, 我們在參觀 Mittag-Leffler 研究所時聽取了它。我們幾個人去了斯德哥爾摩皇家理工學院 KTH, 曾根先生在那裡發表它。也許是 1997 年。

青木: 也許, 是 KTH 的 David Enskog[59]講座。

劉: 對。我們都去聽他講。而後我問了他一個非常愚蠢的問題:『如何改變你的氣體的平均自由徑?』我說:『這個圍繞地球的空氣, 你怎麼改變它的平均自由徑?』他可能從來沒有聽過這麼愚蠢的問題。他回到你們那裡, 必定有告訴你們有個傢伙問了這麼愚蠢的問題。

青木: 是的, 我記得他提到過。那時, 他已經知道你是雙曲守恆定律領域的大數學家。他說:『我很震驚, 這麼一位大數學家, 問了這麼一個基本的問題』。

劉: 好的, 我願意相信你這句話的前半部分, 但是這句話的後半部分是真的。真是個愚蠢的問題。是的, 我們都去了那裡。我們去坐公共汽車, 對吧?

---

[58]土井俊行 (Toshiyuki Doi), 日本應用數學家, 任教於鳥取大學工學院, 研究稀薄氣體動力學。

[59]David Enskog (1884~1947) 瑞典數學物理學家, 對氣體動力學理論做出了重大貢獻。他最著稱的是他在擴展 Maxwell-Boltzmann 方程式方面的工作, 這爲 Chapman-Enskog 方法奠定了基礎。此方法可以從 Boltzmann 方程式推導出 Navier-Stokes 方程, 從而更深入地了解流體動力學。

尤: 我不記得了。我只記得我們去了 KTH。

劉: 對, 我說:『我們都去吧』。所以我們幾個人都去了 KTH。

青木: David Enskog 是 KTH 的教授。1996 年在北京舉辦稀薄氣體動力學研討會, 曾根先生在研討會上給了 Harold Grad 講座。瑞典物理學家、KTH 的 Lars Söderholm[60] 教授聽了曾根先生的演講。由於他對演講印象深刻, 於是請曾根先生在 KTH 發表 Enskog 講座。

劉: 原來如此。

青木: 回到那分枝圖。我們花了很多時間在圖上面, 但我自己在 90 年代初不知何故不再研究它。但曾根先生有一個想法, 可以透過分析方法來闡明音速點 (sonic point) 的分叉結構。這項研究的結果是我提到的他 1998 年的論文。我想這是你們研究不變流形的強烈動機。

劉: 是的。我告訴過你, 我在 2000 年決定回到臺灣時, 我問 Joe Keller:『「誰是真正瞭解動力學理論的人』? 他立即說是曾根先生。我問 Claude Bardos:『誰擅長 Boltzmann 方程』? 他說的是 Cédric Villani[61]。

青木: 嗯, 那時 Villani 還很年輕。

劉: 很年輕, 是的。他來過臺灣。他先是說 :『我明年來可以嗎』? 我說 :『當然好』。他在臺灣逗留了一個月。但我與曾根先生的互動更豐富、更持久。

尤: 是的, 實際上, 我去史丹佛大學參加您籌辦的研討會時, 在那裡遇到了 Marshall Slemrod[62]。那時 Marshall 已經向我提到了曾根先生 。他說 :『最好的是曾根先生』。

劉: 其實在那之前我就認識曾根先生了。在那之前我去過京都。但那時我較常在數學系。

青木: 是的。山口先生。

尤: 是的, 我告訴 Slemrod 這個帶邊界的 Burgers 方程時, 他告訴我, 實際上曾根先生比任何人都更了解邊界值問題。

青木: 是的, 曾根先生最初來自工程學, 工程學中的大多數氣體動力學問題都包含邊界。一般來說, 從工程和物理的角度來看, 沒有邊界的問題沒有多大意義。從這個意義上說, 整個空間的問題通常不是很有趣。

劉: 我們做過。

[60] Lars Söderholm, 瑞典數學家、斯德哥爾摩皇家理工學院 (KTH) 教授, 研究氣體動力學理論、連續介質力學及相對論, 對非牛頓現象和非線性聲學的研究做出重大貢獻。

[61] Cédric Villani (1973∼), 法國數學家, 對動力學理論和最優傳輸理論貢獻卓著。因他在 Boltzmann 方程及朗道阻尼方面的工作, 於 2010 年獲頒費爾茲獎。專訪 2018 年 12 月刊登於數學傳播第 42 卷第 4 期。

[62] Marshall Slemrod (1944∼), 美國數學家, 任教於威斯康辛大學麥迪森分校, 對固體中演化相界面的研究做出了重大貢獻, 這是材料科學和連續介質力學的關鍵領域。

青木: 對不起。當然, 正如你非常清楚的那樣, 黎曼問題是整個空間上的一個重要物理問題。例如, 許多數學家一直在研究 Boltzmann 方程的柯西問題。我知道它根據情況提供了許多有趣的數學問題。然而, 在許多問題, 長時極限相當無趣, 比如均勻平衡狀態, 只是一個真空, 等等。另一方面, 如果存在邊界, 在過渡過程中, 甚至在長時間的限制中, 可能會出現許多有趣的現象。但是, 要研究動力學或流體方程的邊界值問題, 方程必須具有適當的邊界條件。在我看來, 如果你的動力學或流體方程沒有合適的邊界條件, 那就是它們的嚴重缺點。例如, 經常使用的 Navier-Stokes 方程以外的高階流體方程, 例如 Grad 動差方程, 以及基於不可逆熱力學的方程。但正確的邊界條件一般無法得知。我認爲這是一個嚴重的缺陷。

劉: 遷移到新環境的人往往會尋找可以用舊工具能解決的問題。對我和釋賢來說, 老工具是截波 shock wave 理論。這並不是一個壞的出發點。但後來我們從京都學派那裡了解到, 動力學理論和流體動力學之間的差異, 最明顯是在邊界。

尤: 是的, 我們一直關注邊界。

劉: 也許我們到此爲止。很高興您回到台北, 並同意這次非常好的談話。非常感謝您, 希望經常在這裡見到您。

—本文訪問者劉太平、尤釋賢任職於中央研究院數學研究所—